6. Präsenzübung zur Fortgeschrittenen Quantentheorie, SS 2010

(zu bearbeiten am Dienstag, 29.06.2010)

Aufgabe P11 *Darstellungen der Lorentzgruppe*

Die sechs Erzeugenden $J^{\alpha\beta} = -J^{\beta\alpha}$ der Lorentzgruppe erfüllen die Kommutatorrelationen

$$[J^{\alpha\beta}, J^{\gamma\delta}] \;=\; \mathrm{i}(\eta^{\beta\gamma}J^{\alpha\delta} - \eta^{\alpha\gamma}J^{\beta\delta} - \eta^{\beta\delta}J^{\alpha\gamma} + \eta^{\alpha\delta}J^{\beta\gamma}) \qquad \text{mit} \quad \alpha,\beta,\gamma,\delta = 0,1,2,3\ .$$

a) Man unterteilt die Erzeugenden in je drei Generatoren von Drehungen (L^i) und Boosts (K^i) gemäß

$$L^i \;=\; \tfrac{1}{2}\epsilon^{ijk}J^{jk} \quad\Leftrightarrow\quad J^{ij} \;=\; \epsilon^{ijk}L^k \qquad \text{und} \qquad K^i \;=\; J^{0i} \qquad \text{mit} \quad i = 1,2,3\ ,$$

also $\quad L^1 = J^{23}\ ,\quad L^2 = J^{31}\ ,\quad L^3 = J^{12}\ ,\quad K^1 = J^{01}\ ,\quad K^2 = J^{02}\ ,\quad K^3 = J^{03}\ .$

Eine infinitesimale Lorentztransformation kann dann geschrieben werden als

$$\Phi \quad\mapsto\quad (\mathbb{1} \;-\; \mathrm{i}\,\vec{\theta}\cdot\vec{L} \;-\; \mathrm{i}\,\vec{\beta}\cdot\vec{K})\,\Phi\ .$$

Wir wissen bereits, dass $[L^i, L^j] = \mathrm{i}\epsilon^{ijk}L^k$. Bestimmen Sie die Kommutatorrelationen $[K^i, K^j]$ sowie $[L^i, K^j]$. Zeigen Sie, dass die komplexen Linearkombinationen

$$\vec{J}_{\mathrm{L}} \;=\; \tfrac{1}{2}(\vec{L} + \mathrm{i}\vec{K}) \qquad \text{und} \qquad \vec{J}_{\mathrm{R}} \;=\; \tfrac{1}{2}(\vec{L} - \mathrm{i}\vec{K})$$

zwei miteinander vertauschende Drehimpuls-Algebren bilden:

$$[J^i_{\mathrm{L}}, J^j_{\mathrm{L}}] \;=\; \mathrm{i}\epsilon^{ijk}J^k_{\mathrm{L}} \quad , \qquad [J^i_{\mathrm{R}}, J^j_{\mathrm{R}}] \;=\; \mathrm{i}\epsilon^{ijk}J^k_{\mathrm{R}} \quad , \qquad [J^i_{\mathrm{L}}, J^j_{\mathrm{R}}] \;=\; 0\ .$$

b) Das Resultat von Teil a) bedeutet, dass jede endlich-dimensionale Darstellung der Lorentzgruppe durch ein Paar $(j_{\mathrm{L}}, j_{\mathrm{R}})$ von (ganz- oder halbzahligen) Spins festgelegt ist. In der Spin-$\frac{1}{2}$-Darstellung des Drehimpulses gilt $\vec{J} \doteq \frac{1}{2}\vec{\sigma}$. Schreiben Sie damit explizit die Transformationen, die der $(\frac{1}{2}, 0)$ und der $(0, \frac{1}{2})$-Darstellung der Lorentzgruppe entsprechen. Sie erhalten die in der Vorlesung gezeigte Transformation der Weyl-Spinoren ψ_{L} und ψ_{R}.

Raten Sie, welche Objekte (Spinoren, Tensoren?) mit den Matrizen der Darstellungen $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und $(1, 0)$ transformieren (Dimensionalität?). Was ist $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$?

Aufgabe P12 *Diracgleichung mit kugelsymmetrischem Potential*

Zeigen Sie, dass für ein Dirac-Teilchen in einem kugelsymmetrischem Potential $V(r)$ die Größe $\vec{L} + \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}$ eine Konstante der Bewegung ist, nicht jedoch $\vec{L}$ allein. Was bedeutet dies?

Erinnerung: $\qquad \vec{L} \;=\; (\vec{r}\times\vec{p})\cdot\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{\Sigma} \;=\; \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}\ .$